

矢量辐射传输方程求解中的 δ -M 方法*

段民征** 吕达仁

中国科学院大气物理研究所, LAGEO, 北京 100029

摘要 以有限流数离散化辐射传输方程进行数值求解过程中, 尤其是对于散射各向异性较强的散射介质, 常常采用 δ -M 方法以提高数值计算的速度和精度, 并且在标量辐射传输模式中得到了很好的应用. 但是, 对于矢量辐射传输模式, 具体的 δ -M 变换方法还没有见到, 各个矢量辐射传输模式应用也不相同, 甚至是错误的. 基于此, 文中从理论上对矢量辐射传输中的 δ -M 变换进行了具体推导, 并给出严格的变换公式, 从而避免数值求解过程中的不必要的误差.

关键词 矢量辐射传输 Stokes 矢量 δ -M 变换

辐射传输方程是描述电磁波在介质中传播及其再分配方式的基本方程, 由于其为一高度非线性的微分积分方程, 一般情况下还无法找到解析解, 只能用数值方法来逼近求得近似解. 求解过程中, 一般将 Stokes 矢量作 Fourier 变换, 将散射相函数展开为 Legendre 多项式形式, 然后将每个 Fourier 分量离散化, 用有限项累加求和代替方程中的积分, 这正是辐射传输计算误差的主要来源. 理论上已经证明^[1], 角度积分点个数与散射相函数的 Legendre 展开项数之间必须满足一定的关系式, 才能保证辐射传输计算中多次散射相的积分守恒和计算稳定性. 当散射介质具有很强的前向散射特征时, Legendre 展开项数必须很大才能较真实的逼近原函数, 从而要求角度积分点必须取得足够多才能达到精度要求. 但是, 积分点数越多, 其对应的离散化方程组也就越大, 从而其应用在两方面受到限制: 一是计算所需要的时间增长很快, 计算过程变得缓慢, 二是求解矩阵很庞大, 有可能导致计算不稳定. 因此, 从计算条件、计算效率以及可应用性的角度考虑, 应寻找一种高精度、高时效的计算方法.

Wiscombe^[2]在 δ -Eddington^[3]近似的基础上提出 δ -M 变换方法以提高强前向散射的辐射传输计算精度和计算效率, 此方法在标量辐射传输模式中已得到很好的应用. 在矢量辐射传输计算中也应当存在相应的变换方法, 但具体变换方法还未见到, 当前各个模式中所用的变换形式也不一致^[1], 有些甚至是错误的. 因此, 本文将推导矢量辐射传输求解中的 δ -M 变换方法的具体形式以规范其应用, 为发展未来对地偏振遥感方法, 包括从理论建模、仿真实验到上天验证等提供一个高精度的快速模拟工具.

1 矢量辐射传输方程

辐射是电磁波的一种表现形式, 其状态的完整描述可由 Stokes 参数表示, 即 I, Q, U, V 四个分量, 电磁波在平面平行介质(如大气)中的传输及其再分配方式可由矢量辐射传输方程表示^[4]

$$\mu \frac{d\mathbf{I}(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = -\mathbf{I}(\tau, \mu, \phi) + \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{M}(\tau, \mu, \phi; \mu', \phi') \mathbf{I}(\tau, \mu', \phi') d\mu' d\phi' +$$

2006-04-24 收稿, 2006-09-01 收修稿稿

* 国家自然科学基金(批准号: 40333034 和 40675018)以及中国科学院创新基金资助项目

** E-mail: dmz@mail.iap.ac.cn

1) 段民征, 陆地上空大气气溶胶和地表反照率的同时反演——卫星标量辐射和偏振信息的联合利用. 博士论文, 2001, 中国科学院大气物理研究所, 北京

$$\frac{\omega}{4\pi} F_0 \exp(-\tau/\mu_0) \mathbf{M}(\tau, \mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) [1, 0, 0, 0]^T + (1 - \omega) B(T) [1, 0, 0, 0]^T \quad (1)$$

其中 \mathbf{I} 为 Stokes 矢量, 可表示为

$$\mathbf{I} = [I, Q, U, V]^T \quad (2)$$

当只考虑 I 分量时即得到一般的标量辐射传输方程. (1)式中上标 T 表示转置矩阵, μ 为极角余弦, 向下为正, 向上为负, ϕ 为相对于太阳出射光线的方位角, τ 为光学厚度, ω 为单次散射反照率, F_0 为大气顶太阳入射辐射通量, μ_0, ϕ_0 为太阳天顶角的余弦和方位角, B 为 Planck 函数, \mathbf{M} 为 4×4 阶散射相矩阵, 又称 Mueller 矩阵. 式中右边第二项为多次散射的贡献, 第三项为单次散射的贡献, 第四项为热辐射项, 根据研究对象的性质可分别予以取舍. 对于可见和近红外波段, 散射源为主要贡献项, 热辐射源一般不予考虑. 以下讨论将主要针对可见光和近红外波段, 因此, 方程中略去热辐射源项.

方程中 Mueller 矩阵 \mathbf{M} 由单次散射相矩阵 \mathbf{P} 经参考平面旋转变换后得到. 对于球形和镜面对称的随机取向的散射粒子群而言, 散射相矩阵 \mathbf{P} 为具有如下式形式的对称矩阵^[5,6].

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1(\Theta) & b_1(\Theta) & 0 & 0 \\ b_1(\Theta) & a_2(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\Theta) & b_2(\Theta) \\ 0 & 0 & -b_2(\Theta) & a_4(\Theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 Θ 值为散射角, 值得注意的是, (1) 式中 $\mathbf{I}(\tau, \mu, \phi)$ 是以经向平面 OP_2Z 为参考平面, $\mathbf{I}(\tau, \mu', \phi')$ 是以经向平面 OP_1Z 为参考平面, 而单次散射相矩阵 \mathbf{P} 是以散射平面 OP_1P_2 为参考平面的 (如图 1), 因此, 经过旋转变换可以得到 Mueller 矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \cos 2i_1 & -b_1 \sin 2i_1 & 0 \\ b_1 \cos 2i_2 & a_2 \cos 2i_1 \cos 2i_2 & -a_2 \sin 2i_1 \cos 2i_2 & -b_2 \sin 2i_2 \\ 0 & -a_3 \cos 2i_1 \cos 2i_2 & -a_3 \cos 2i_1 \sin 2i_2 & b_2 \cos 2i_2 \\ b_1 \sin 2i_2 & a_2 \cos 2i_1 \sin i_2 & -a_2 \sin 2i_1 \sin 2i_2 & b_2 \cos 2i_2 \\ 0 & +a_3 \sin 2i_1 \cos 2i_2 & +a_3 \cos 2i_1 \cos 2i_2 & b_2 \cos 2i_2 \\ 0 & -b_2 \sin 2i_1 & -b_2 \cos 2i_2 & a_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

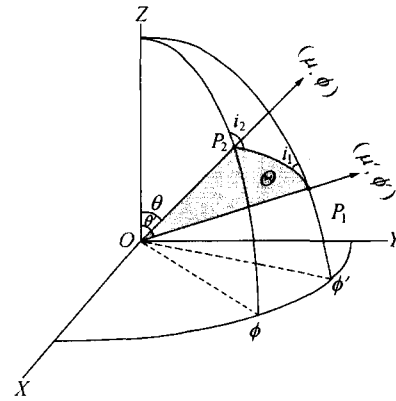


图 1 散射几何关系示意图

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}(\pi - i_2) \mathbf{P}(\Theta) \mathbf{L}(-i_1) \quad (4)$$

其中 i_1 为平面 OP_1Z 和 OP_1P_2 的夹角, i_2 为平面 OP_2Z 和 OP_1P_2 的夹角, 可由球面几何关系求得:

$$\cos i_1 = \frac{-\mu + \mu' \cos \Theta}{\pm \sqrt{(1 - \cos^2 \Theta)(1 - \mu'^2)}} \quad (5)$$

$$\cos i_2 = \frac{-\mu' + \mu \cos \Theta}{\pm \sqrt{(1 - \cos^2 \Theta)(1 - \mu^2)}} \quad (6)$$

其中, 当 $\pi < \phi - \phi' < 2\pi$ 时取 “-” 号, 当 $0 < \phi - \phi' < \pi$ 时取 “+” 号. $\mathbf{L}(\chi)$ 为变换矩阵, 可由矢量旋转公式和 Stokes 矢量 $[I, Q, U, V]^T$ 的定义得到

$$\mathbf{L}(\chi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\chi & \sin 2\chi & 0 \\ 0 & -\sin 2\chi & \cos 2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

将(3)式和(6)式代入(4)式可以得到散射相矩阵 \mathbf{M}

辐射传输方程(1)式是一个高度非线性微分积分方程,除特定情况外必须进行数值离散求解.对入射光为自然太阳光和以太阳光方向为参考系的大气辐射传输方程,边条件主平面对称,因此,可以将 Stokes 矢量 \mathbf{I} 和散射相矩阵 \mathbf{M} 作如下形式的 Fourier 变换^[7],将散射相矩阵 \mathbf{P} 中各分量作 Legendre 展开

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{2M} \begin{bmatrix} I_m \cos m(\phi - \phi_0) \\ Q_m \cos m(\phi - \phi_0) \\ U_m \sin m(\phi - \phi_0) \\ V_m \sin m(\phi - \phi_0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{m=0}^{2M-1} [\mathbf{M}_m^c \cos m(\phi - \phi') + \mathbf{M}_m^s \sin m(\phi - \phi')] \quad (10)$$

$$a_i(\Theta) = \alpha_0 + \sum_{\ell=1}^{2M-1} (2\ell+1)\alpha_{i\ell} p_\ell(\Theta), \quad i=1,2,3,4$$

$$b_i(\Theta) = \beta_0 + \sum_{\ell=1}^{2M-1} (2\ell+1)\beta_{i\ell} p_\ell(\Theta), \quad i=1,2 \quad (11)$$

(10)式中上标 c 和 s 分别表示余弦和正弦(以下同). $p_\ell(\Theta)$ 为 Legendre 函数, $\alpha_{i\ell}$ 和 $\beta_{i\ell}$ 为展开系数,根据 Legendre 函数的加法定理,这种展开方法使辐射传输方程经过 Fourier 变换后,对每一个 Fourier 分量,散射相函数的 Legendre 展开形式和系数不变,从而使方程离散化变得相对简单^[4].另外,散射相函数的 Legendre 展开式的角度积分是自动归一的,因此,利用散射相函数的 Legendre 展开形式使离散方程的角度积分的归一化条件很容易得到满足,从而能量积分自然保持守恒,保证方程数值解的收敛.但是,当截断项 M 不够大时,这种展开也易导致解的虚假振荡特征¹⁾.

2 矢量辐射传输求解中的 δ -M 方法

略去单次散射项和热辐射项,则(1)式可以改写为

$$\mu \frac{d\mathbf{I}(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = -\mathbf{I}(\tau, \mu, \phi) + \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{M}(\tau, \mu, \phi; \mu', \phi') \mathbf{I}(\tau, \mu', \phi') d\mu' d\phi' \quad (12)$$

考虑到散射介质的前向散射效应,将散射相矩阵 \mathbf{P} 作以下变换

$$\mathbf{P}(\tau, \mu, \mu') = 2f\delta(1 - \cos\Theta)\mathbf{E} + (1-f)\mathbf{P}^* \quad (13)$$

即表示为 δ 函数和一缓变函数之和,其中 \mathbf{E} 为单位对角矩阵,

$$\mathbf{P}^*(\Theta) = \begin{bmatrix} a_1^*(\Theta) & b_1^*(\Theta) & 0 & 0 \\ b_1^*(\Theta) & a_2^*(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^*(\Theta) & b_2^*(\Theta) \\ 0 & 0 & -b_2^*(\Theta) & a_4^*(\Theta) \end{bmatrix} \quad (14)$$

设 a_i^* , b_i^* 具有 Legendre 展开形式,

$$a_i^*(\Theta) = \alpha_{i0}^* + \sum_{\ell=1}^{2M-1} (2\ell+1)\alpha_{i\ell}^* p_\ell(\Theta), \quad i=1,2,3,4$$

$$b_i^*(\Theta) = \beta_{i0}^* + \sum_{\ell=1}^{2M-1} (2\ell+1)\beta_{i\ell}^* p_\ell(\Theta), \quad i=1,2 \quad (15)$$

δ 函数具有简单的 Legendre 展开形式,

$$\delta(1 - \cos\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{2M-1} (2\ell+1) p_\ell(\Theta) \quad (16)$$

为使经过变换后散射能量的总体平衡保持不变,变换前后散射相函数必须相等,因此,变换前后的 Legendre 展开系数也应相等.将(11), (15), (16)式代入(13)式,比较两边系数可得:

当 $\ell \leq 2M-1$ 时,

$$\alpha_{i\ell} = f + (1-f)\alpha_{i\ell}^*$$

$$\beta_{i\ell} = (1-f)\beta_{i\ell}^* \quad (17)$$

当 $\ell \geq 2M$ 时,

$$\alpha_{i\ell} = f$$

$$\beta_{i\ell} = 0 \quad (18)$$

经简单变换就可以得到 δ -M 变换后的 Legendre 展

1) 段民征, 吕达仁. 适用于遥感应用的辐射传输高精度快速计算方法, 待发表

开系数:

$$\begin{aligned} \alpha_{ie}^* &= (\alpha_{ie} - f)/(1 - f), \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \beta_{ie}^* &= \beta_{ie}/(1 - f), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

取 $f = \alpha_{1,2M}$, 即对角线上超出 $2M$ 项的变换系数等于能量展开的第 $2M$ 项系数. 将(13)和(19)式代入(12)式可得

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} &= -\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) + f\omega\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) \cdot \\ \lim_{\mu' \rightarrow \mu, \varphi' \rightarrow \varphi} [\mathbf{L}(\pi - i_2)\mathbf{L}(-i_1)] &+ (1 - f) \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \cdot \\ \mathbf{M}^*(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') \mathbf{I}(\tau, \mu', \varphi') &d\mu' d\varphi' \end{aligned} \quad (20)$$

由图 1 和 (5), (6) 式容易得到

$$\lim_{\mu' \rightarrow \mu, \varphi' \rightarrow \varphi} [\mathbf{L}(\pi - i_2)\mathbf{L}(-i_1)] = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\} = \mathbf{E} \quad (21)$$

其中 \mathbf{E} 为单位矩阵, 则方程(20)简化为

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} &= -(1 - f\omega)\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) + \\ (1 - f) \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{M}^*(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') \mathbf{I}(\tau, \mu', \varphi') &d\mu' d\varphi' \end{aligned} \quad (22)$$

将光学厚度 τ 、单次散射反照率 ω 作如下变换:

$$\begin{aligned} \tau^* &= (1 - f\omega)\tau \\ \omega^* &= (1 - f)\omega/(1 - f\omega) \end{aligned} \quad (23)$$

代入(22)式可以得到

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau^*} &= -\mathbf{I}(\tau, \mu, \varphi) + \frac{\omega^*}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \cdot \\ \mathbf{M}^*(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') \mathbf{I}(\tau, \mu', \varphi') &d\mu' d\varphi' \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{L}(\pi - i_2)\mathbf{P}^*(\Theta)\mathbf{L}(-i_1) \quad (25)$$

比较(24)与(12)式可以看到, 经过 δ -M 变换后的辐射传输方程与原方程在形式上完全一样, 只需将散射相矩阵及其 Legendre 变换系数、光学厚度、单次散射反照率作形如(13)、(19)和(23)式的变换即可. Wiscombe^[2] 在标量辐射传输计算中已经证

明, 此种变换可大大降低计算所需流数, 提高计算效率, 并能在很大程度上抑制由散射相矩阵展开阶数过低导致的解的虚假振荡, 但在 Evans 等^[8] 发展的倍加累加法矢量辐射传输模式中未采用(19)式的变换形式, 而是采用了以下方法:

$$\begin{aligned} \alpha_{ie}^* &= (\alpha_{ie} - f)/(1 - f), \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \beta_{ie}^* &= \beta_{ie}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (26)$$

由前面的推导所得(19)式可以知道, 上式的变换是错误的. 但是, 当散射粒子较小而散射相矩阵 Legendre 展开阶数较大时, f 值很小, 上式的利用不会引起很大误差, 这也是其错误应用一直未引起人们的注意的主要原因. 如果大气中存在大量尺度较大的散射粒子(如沙尘粒子, 云滴粒子等), 此时 f 值较大或者不是小到可以忽略的地步, 上式的应用势必引起辐射矢量的较大误差.

3 实例分析

为验证矢量辐射传输计算中的 δ -M 变换方法和不同变换方式造成的误差, 以传输型沙尘气溶胶粒子为例进行了实例计算. 单次散射相矩阵(14)式由 Mie 散射计算得到. 应当说明的是, 虽然沙尘粒子并非理想的球形粒子, 但由于我们此文主要分析 δ -M 变换在矢量辐射传输计算中的可应用性及其计算精度, 因此, Mie 散射近似并不影响我们的分析结果. 另外, 研究表明, 如果粒子群的有效半径和有效方差相同, 粒子尺度谱的具体形式并不会影响其单次散射相矩阵各分量随角度分布形式^[9], 因而计算中粒子尺度谱采用形式简单的对数正态分布, 有效半径为 2.23, 有效方差为 0.86^[10]. 参考波长取现有星载偏振测量仪器 POLDER 和地基偏振测量 CIMEL 中普遍采用的 865 nm 通道, 对应的沙尘气溶胶复折射率取 1.53-0.008i.

图 2 为散射相矩阵的(14)式中 a_1, a_3, b_1, b_2 (球形粒子散射相矩阵 $a_2 = a_1, a_4 = a_3$) 及其展开截断近似, 可以看到, 32 流直接截断近似情况下相矩阵中 a_1, a_3 项随角度变化振荡明显, 有些角度下还会出现负值, 而经过变换后的函数值除前向散射(0 度散射角附近)外已能很好的逼近原函数, 改善效果明显. 而 b_1, b_2 项, 变换前后两者差别不大.

图 3 为 32 流近似情况下， δ -M 变换前和变换后利用逐次散射法^[6]辐射传输计算结果各 Stokes 分量的误差分析，计算条件为整层大气的光学厚度为

1.0，太阳天顶角的余弦为 0.6，地表为 Lambert 反射面，反照率取为 0。图中横坐标为观测天顶角的余弦，负值表示天顶上行，正值表示地面下行，纵

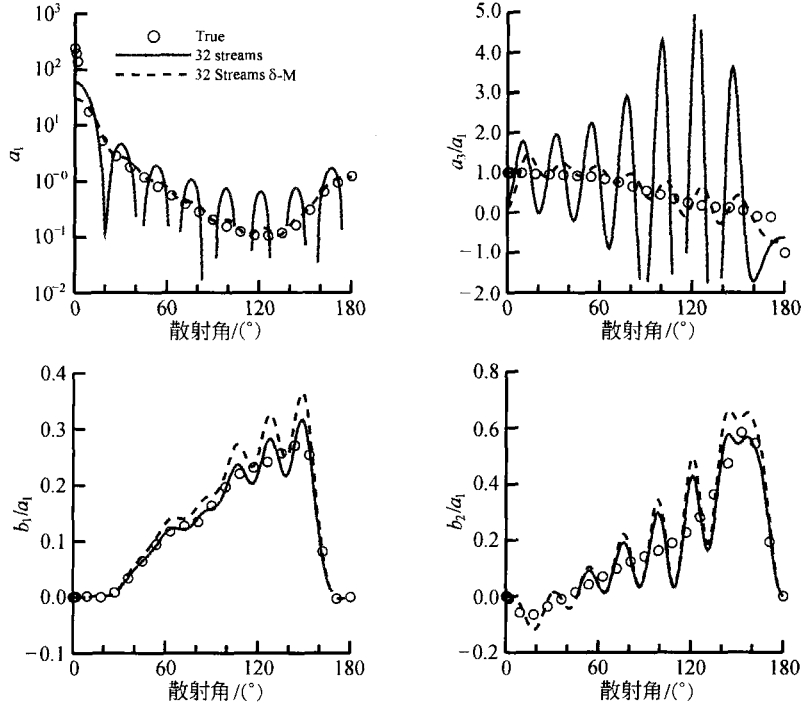


图 2 单次散射相矩阵 a_1, a_3, b_1, b_2 分量及其 Legendre 展开近似的计算误差

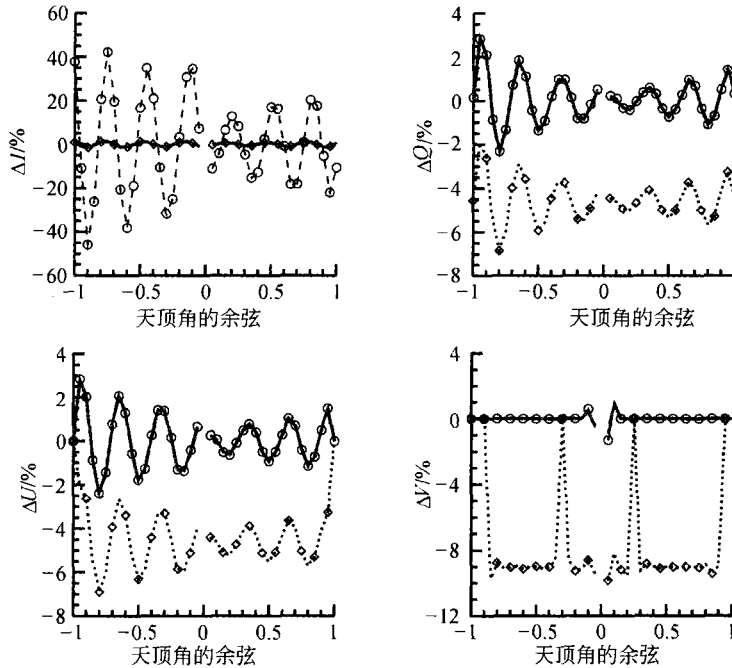


图 3 32 流近似下 Stokes 矢量 $[I, Q, U, V]$ 各分量在相矩阵直接展开计算(虚线+O)，经 δ -M 变换 (19) 式(粗实线)和 δ -M 变换(26)式(点线+◇)的计算误差

坐标为归一化参量,即乘以 π/F_0 ,其中 F_0 为地外太阳辐射通量。可以看到,对 Q, U, V 分量而言,无论是否经过 δ -M变换,计算结果相当,误差均在2%左右。但对于 I 分量,32流近似下经过 δ -M变换很好的逼近真实值,而直接截断的误差超高40%,并且随角度分布有明显的虚假振荡,这种虚假振荡归因于相矩阵展开截断,要消除这种虚假振荡,提高模拟精度,必须增加相矩阵展开项数,相应地增大计算流数,而流数的增加导致计算时间呈指数增长。模拟分析表明,128流的直接截断才能达到32流 δ -M变换的精度,在CPU3.2GHz,1G内存PC机上,128流近似需要491.2s,而32流只需要12.9s。

为比较分析不同的变换方式,图3中同时给出了方程(26)的变换后的辐射传输计算误差。可以看到,对 I 分量而言,两种变换方式(19)和(26)式的计算结果相当,而偏振分量 Q, U, V 的结果差别很大,变换(26)式导致的计算误差明显增大,比(19)式变换的计算误差高出了两倍多,此时的 f 值为0.0462,可见错误的变换方法对偏振分量的计算结果影响很大。

4 小结

在辐射传输计算中,对于散射各向异性较强的散射介质(如大气中存在较大的气溶胶粒子时)常常采用 δ -M变换方法以提高计算精度和计算速度,理论和标量辐射传输的计算实践已经证明 δ -M变换方法是有效的,这种变换对于矢量辐射传输也是可以应用的,但是在现有的辐射传输模式中对 δ -M变换采用的具体形式还不完全统一,本文从理论上对矢量辐射传输中的 δ -M变换作了具体推导,给出变换

公式,目的是规范其应用并避免不必要的计算误差。针对传输扩散型沙尘粒子的计算分析表明, δ -M变换可以大大改善计算精度和计算效率,但是错误的变换方式对偏振的计算结果影响很大。

参 考 文 献

- 1 Davis PJ, Rabinowitz P. *Methods of Numerical Integration*. Orlando: Academic Press, 1975, 73
- 2 Wiscombe WJ. Delta-M method: Rapid yet accurate radiative flux calculations for strongly asymmetric phase functions, *J Atmos Sci*, 1977, 34(9): 1408—1422
- 3 Joseph JH, Wiscombe WJ, Weinman JA. Delta-Eddington approximation for radiative flux transfer. *J Atmos Sci*, 1976, 33(12): 2452—2459
- 4 Liou KN 著. 大气辐射导论, 第二版. 郭彩丽, 周诗健译. 北京: 气象出版社, 2004, 544—547
- 5 De Haan JF, Bosma PB, Hovenier JW. The adding method for multiple scattering computations of polarized light. *Astron Astrophys*, 1987, 183: 371—391
- 6 Min QL, Duan MZ. A successive order of scattering model for solving vector radiative transfer in the atmosphere. *J Quant Spectrosc Rad Tran*, 2004, 87: 243—259
- 7 Schulz FM, Stamnes K, Weng F. VDISORT: An improved and generalized discrete ordinate method for polarized (Vector) radiative transfer. *J Quant Spectrosc Rad Tran*, 1999, 61(1): 105—122
- 8 Evans KF, Stephens GL. A new polarized atmospheric radiative transfer model. *J Quant Spectrosc Rad Tran*, 1991, 46: 413—423
- 9 Hansen JE, Travis LD. Light scattering in planetary atmospheres. *Space Sci Rev*, 1974, 16: 527—610
- 10 Hess M, Koepke P, Schult I. Optical properties of aerosols and clouds; The software package OPAC. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 1998, 79(5): 831—844